Revisão Matemática

Ney Lemke

Departamento de Física e Biofísica

2010

Outline

unesp

Outline

Escalares

Escalares

São quantidades que não dependem do sistema de coordenadas usado para caracterizar um sistema físico.

Example

- Temperatura T
- Massa m

Vetores

Vetores

São quantidades que dependem do sistema de coordenadas usado para caracterizar um sistema físico. Intuitivamente eles podem ser imaginados como segmentos orientados de reta.

Example

- Posição $\vec{r}$ ou **r**
- Velocidade $\vec{v}$ ou **v**
- Aceleração$\vec{a}$ ou **a**
- Força $\vec{F}$ ou **F**

Tensores

Tensores

São quantidades que dependem do sistema de coordenadas usado para caracterizar um sistema físico. Estas quantidades são generalizações de vetores, caracterizados por dois índices.

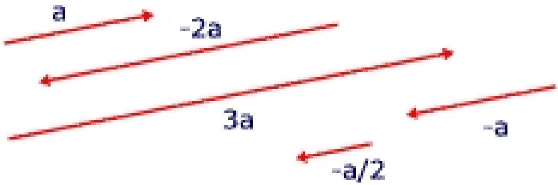
Example

- Momento de Inércia I_{ij}
- Susceptibilidade Elétrica e Magnética ϵ_{ij} e μ_{ij}

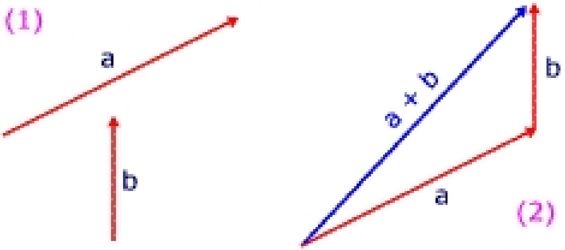
Vetores

A física não depende das escolhas arbitrárias que fazemos do sistema de coordenadas e nem da origem, ou orientação de nosso referencial. Tanto na Mecânica como no Eletromagnetismo visamos construir teorias que utilizem a notação vetorial e que expressem relações contingentes entre as quantidades de interesse.

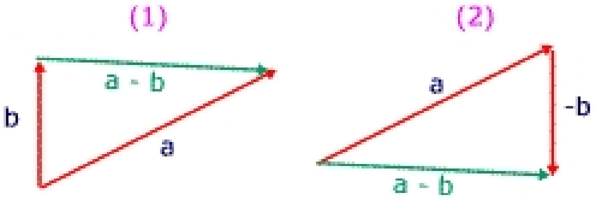
Produto por Escalar



Soma de Vetores

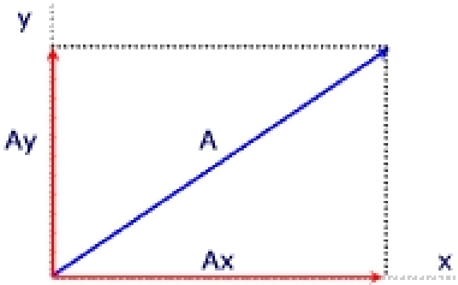


Subtração



Coordenadas de um vetor

$$\vec{A} = A_x \vec{a_x} + A_y \vec{a_y}$$



Módulo de um vetor

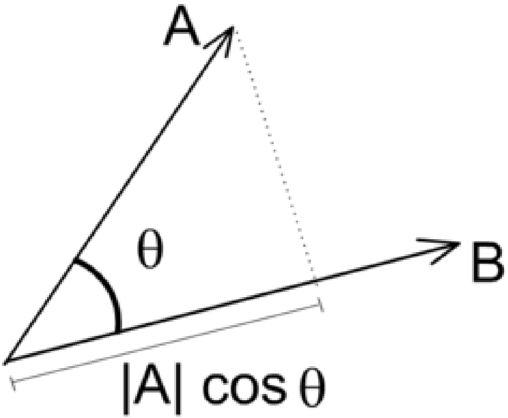
Módulo

O módulo de um vetor $|\vec{A}| = A$, é o tamanho do vetor. Notação:
Vetor unitário

$$\vec{a}_x = \frac{\vec{X}}{X} = \hat{x}$$

Produto Escalar

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$$



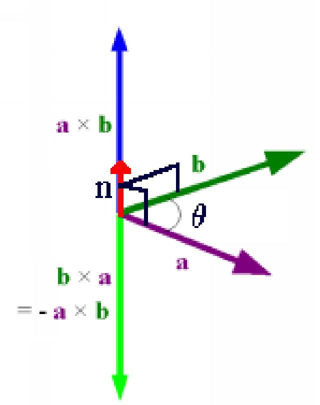
Produto Escalar

Propriedades

- $|A|^2 = A \cdot A$
- $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C}$
- $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

Produto Vetorial

$$\vec{A} \times \vec{B}$$



Produto Vetorial

Propriedades

- $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
- $(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C}$
- $\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$

Notação do Marion

Propriedades

- $$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_i x_i y_i$$
- $$\mathbf{AB}_{ik} = \sum_j A_{ij} B_{jk}$$
- $$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Notação do Marion

Propriedades

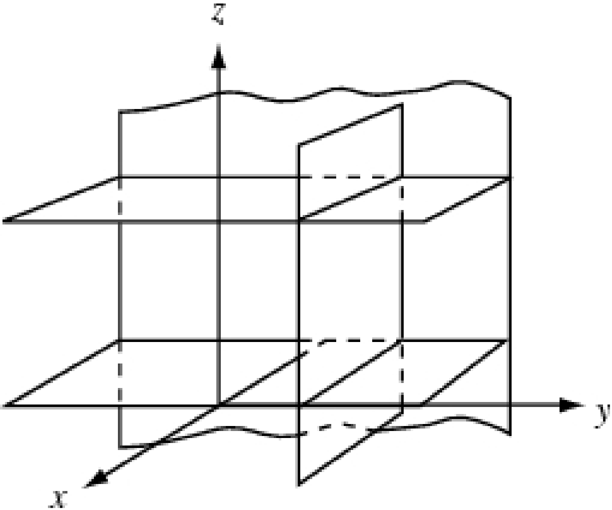
- $$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{permutação par} \\ -1 & \text{permutação impar} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- $$(\vec{A} \times \vec{B})_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} A_j B_k$$

Outline

unesp

Coordenadas Cartesianas



Coordenadas Cartesianas

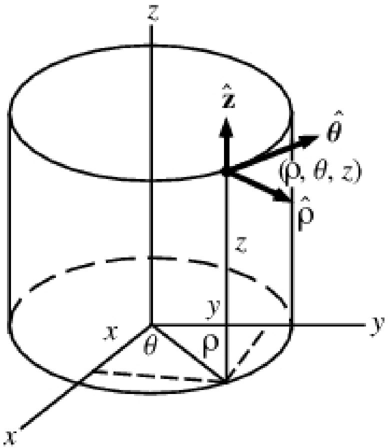
$$\vec{a}_x \times \vec{a}_y = \vec{a}_z \quad \vec{a}_y \times \vec{a}_z = \vec{a}_x \quad \vec{a}_x \times \vec{a}_z = -\vec{a}_y$$

$$\vec{r} = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + z\vec{a}_z$$

$$d\vec{r} = dx\vec{a}_x + dy\vec{a}_y + dz\vec{a}_z$$

$$dV = dxdydz$$

Coordenadas Cilindricas



Coordenadas Cilindricas

$$x = \rho \cos\theta \quad y = \rho \sin\theta \quad z = z$$

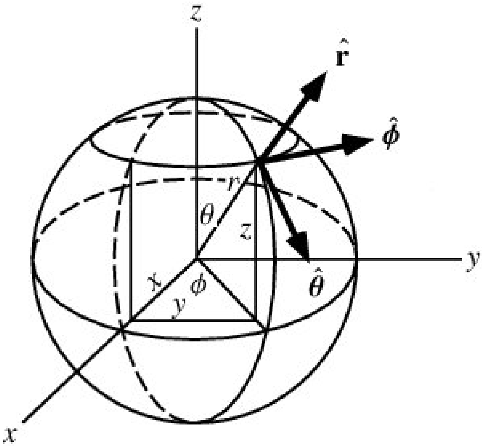
$$\vec{a}_\rho \times \vec{a}_\theta = \vec{a}_z \quad \vec{a}_\theta \times \vec{a}_z = \vec{a}_\rho \quad \vec{a}_z \times \vec{a}_\rho = \vec{a}_\theta$$

$$\vec{r} = \rho\vec{a}_\rho + z\vec{a}_z$$

$$d\vec{r} = d\rho\vec{a}_\rho + \rho d\theta\vec{a}_\theta + dz\vec{a}_z$$

$$dV = \rho d\rho d\theta dz$$

Coordenadas Esféricas



Coordenadas Esféricas

$$x = r\sin\theta\cos\phi \quad y = r\sin\theta\sin\phi \quad z = r\cos\theta$$

$$\vec{a}_r \times \vec{a}_\theta = \vec{a}_\phi \quad \vec{a}_\theta \times \vec{a}_\phi = \vec{a}_r \quad \vec{a}_\phi \times \vec{a}_r = \vec{a}_\theta$$

$$\vec{r} = r\vec{a}_r$$

$$d\vec{r} = dr\vec{a}_\rho + rd\theta\vec{a}_\theta + r\sin\theta d\phi\vec{a}_\phi$$

$$dV = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$$

unesp

Observações Importantes

- O uso de um determinado sistema de coordenados deve espalhar a simetria do problema.
- Os vetores unitários $\vec{a}_r$, $\vec{a}_\theta$, $\vec{a}_\phi$, $\vec{a}_\rho$, $\vec{a}_\theta$ dependem da posição $\vec{r}$.

Notação

Notação

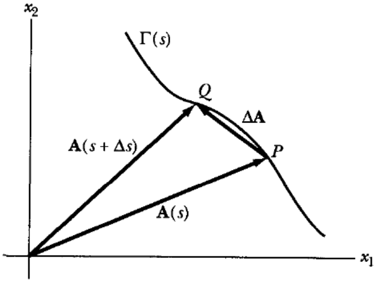
- $$\vec{a}_r = \hat{\mathbf{r}}$$
- $$\vec{a}_\theta = \hat{\theta}$$
- $$\vec{a}_\phi = \hat{\phi}$$

Outline

Outline

Diferenciação de Vetores

$$\frac{d\vec{A}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{A}(s+\Delta s) - \vec{A}(s)}{\Delta s}$$



Identidades

- $$\frac{d}{ds}(\vec{A}+\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{ds} + \frac{d\vec{B}}{ds}$$
- $$\frac{d}{ds}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{ds} + \vec{B}\cdot\frac{d\vec{A}}{ds}$$
- $$\frac{d}{ds}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{ds} + \vec{B}\times\frac{d\vec{A}}{ds}$$
- $$\frac{d}{ds}(\phi\vec{A}) = \phi\frac{d\vec{A}}{ds} + \frac{d\phi}{ds}\vec{A}$$

Velocidade e Aceleração

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}}$$

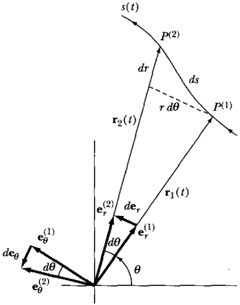
Coordenadas Cartesianas

$$\vec{v} = \sum_i \frac{dx_i}{dt}\vec{e}_i$$

$$\vec{a} = \sum_i \frac{d^2x_i}{dt^2}\vec{e}_i$$

Velocidade em Polares

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$



Aceleração em Polares

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

Velocidade e Aceleração em Cilindricas

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$$

Velocidade e Aceleração em Esféricas

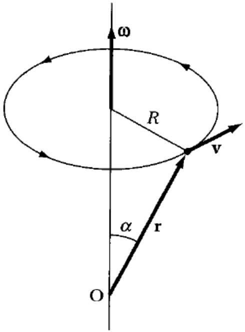
$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin(\theta)\dot{\phi}\vec{e}_\phi$$

$$\vec{a} = ?$$

Velocidade Angular

$$v = R\frac{d\theta}{dt} = r \sin \alpha\omega$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



Medindo distâncias

$$|\vec{r} - \vec{r'}|$$

- Escreva os vetores usando o sistema de coordenadas de interesse, mas utilizando os vetores unitários $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$, $\vec{a}_z$.
- Usando a definição de produto interno calcule $(\vec{r} - \vec{r'}).(\vec{r} - \vec{r'})$
- eleve o resultado a 1/2.

Outline

Gradiente em diferentes sistemas de Coordenadas

Cartesianas

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{a}_z$$

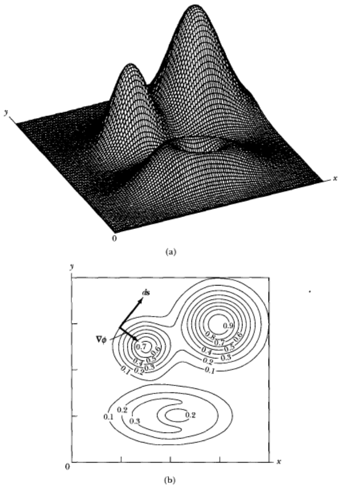
Cilindricas

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\vec{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{a}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{a}_z$$

Esféricas

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{a}_\phi$$

Gradiente



Propriedades do Gradiente

- O vetor gradiente é senpre normal a superfície $\phi =$cte.
- O vetor $\nabla\phi$ sempre aponta na direção de máxima variação de ϕ.
- A derivada na direção $\vec{n}$ é dada por:

$$\vec{n}.\nabla\phi$$

Divergente em diferentes sistemas de Coordenadas

Cartesianas

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Cilindricas

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Esféricas

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

Rotacional em diferentes sistemas de Coordenadas

Cartesianas

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{a_x} + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \vec{a_y} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \vec{a_z}$$

Rotacional em diferentes sistemas de Coordenadas

Cilindricas

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \vec{a_\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{a_\theta} + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho A_\rho}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} \right) \vec{a_z}$$

Rotacional em diferentes sistemas de Coordenadas

Esféricas

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\vec{a_r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right)\vec{a_\theta}$$
$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{a_\phi}$$

Laplaciano em diferentes sistemas de Coordenadas

Cartesianas

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Cilindricas

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

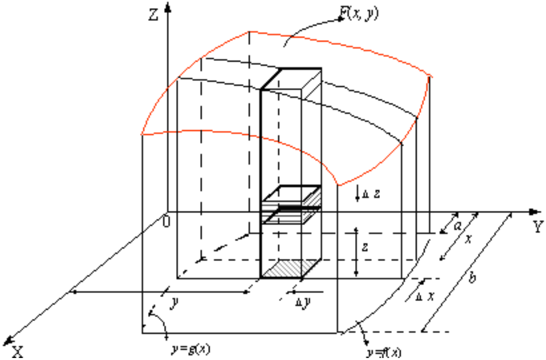
Esféricas

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta\, V)}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

Outline

Integral Volumétrica

$$\int_V f(x, y, z)dV$$

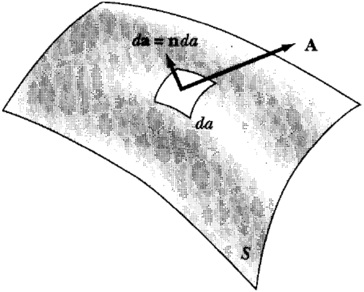


Integral de Superfície

$$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Integral Fechada

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

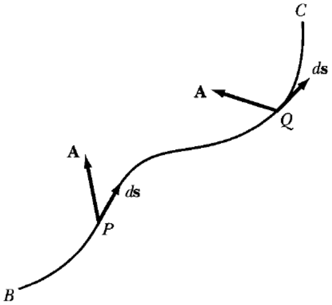


Integral de Linha

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

Integral Fechada

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

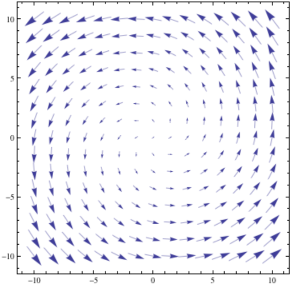


Exemplos

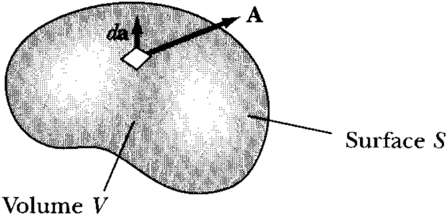
- Calcule o volume de um parabolóide de revolução $z = x^2 + y^2$ entre $z = 0$ e $z = 1$. Use coordenadas cilindricas e cartesianas.
- Suponha agora que o parabolóide possua uma densidade que dependa com a altura com a expressão $\rho = e^{-z}$. Determine a massa.
- Considere uma casca cilíndrica de raio unitário localizada ao longo do eixo z. E considere o campo vetorial $\vec{F} = r\vec{a}_\theta + 2\vec{a}_r$. Calcule o fluxo através da superfície. Represente o campo vetorial.
- Calcule a circulação do fluxo $\vec{F} = 2x\vec{a}_y + y\vec{a}_x$ através das linhas:
  - iniciando em (0,0) até (2,4) através de uma linha reta.
  - iniciando em (0,0) até (2,4) através da parábola $y = x^2$

Exemplos

$$\vec{F} = r\vec{a}_\theta + 2\vec{a}_r$$

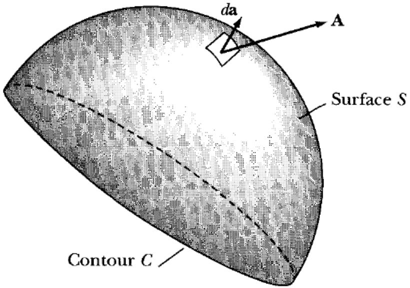


Teorema de Gauss



$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{a} = \int_V \nabla \cdot \vec{A} dV$$

Teorema de Stokes



$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot dS$$

Outline

Relações Vetoriais

$$\nabla \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \vec{B}$$

$$\nabla \cdot (u\vec{A}) = \vec{A} \cdot \nabla u + u(\nabla \cdot \vec{A})$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B}$$

$$\nabla \times (u\vec{A}) = \vec{A} \times \nabla u + u(\nabla \times \vec{A})$$

Relações Vetoriais

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \cdot \vec{B})\vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\nabla \times (\nabla V) = 0$$

Outline

Definição

Formulação do problema:

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y; x) = 0$$

Solução:

$$y = y(C_1, C_2, \ldots, C_n; x)$$

Definição

Para determinar C_i:

$$y(0) = D_1$$

$$\dots$$

$$y^{(n-1)}(0) = D_n$$

Se F é linear este problema é equivalente a solução de um sistema de n equações lineares.

Outline

Sumário

- Cálculo vetorial é essencial para entender Eletromagnetismo.
- Cálculo vetorial é essencial para entender Mecânica Clássica.